Parameter-Identifikation einer Gleichstrom-Maschine

Autor:
Dipl.-Ing. Ingo Völlmecke

Vorteile des Parameter-Identifikationsverfahrens

- Reduzierung des Zeit- und Kostenaufwands im Prüfprozess
- Vollständige Prüfung und Charakterisierung von Elektromotoren

Gleichstrom-Maschinen werden in einer Vielzahl von Anwendungen in unserem täglichen Leben angewendet und erleichtern uns die tägliche Arbeit. Die große Anzahl von Gleichstrom-Maschinen bedeutet aber auch einen hohen Prüfaufwand am Ende des Produktionsprozesses. Der zeitliche Aufwand bei der Prüfung sollte dabei so gering wie möglich sein, so dass der Prüfprozess nicht der langsamste Prozess im Produktionsablauf ist. Aufgrund der steigenden Stückzahlen sind Prüfverfahren entwickelt worden, bei denen die Kennlinie des Prüflings innerhalb von Sekunden bestimmt wird. Diese Verfahren werden als Parameteridentifikationsverfahren bezeichnet. Sie bestimmen die Parameter ohne Ankoppelung einer externen Last nur durch die Messung von Strom und Spannung. Der mechanische und zeitliche Aufwand der Ankoppelung und der Ausrichtung des Prüflings zu einer Lastmaschine entfällt damit komplett.

1 Einführung

Das dynamische Verhalten einer Gleichstrom-Maschine lässt sich mit Hilfe von zwei Gleichungen beschreiben.

Die erste Gleichung beschreibt das elektrische Verhalten

$$u = R \cdot i + k \cdot \omega + L \cdot \frac{di}{dt} \qquad (1)$$

Die zweite Gleichung beschreibt das mechanische Verhalten

$$J \frac{d\omega}{dt} = k \cdot i - k_r \cdot \omega - M_L \qquad (2)$$

dabei werden folgende Formelzeichen verwendet:

Formelzeichen	Einheit	Bezeichnung
u	V	elektrische Klemmspannung
i	A	elektrischer Ankerstrom
ω	1/s	Kreisfrequenz
R	Ω	Ohmscher Anschlußwiderstand
k	Vs	Generatorkonstante
L	H	Induktivität
J	kgm²	Trägheitsmoment
k_r	Nms	Gleitreibung
M_L	Nm	Lastmoment

Anmerkung: Im Lastmoment wird außerdem noch das Haftreibungsmoment berücksichtigt, das systembedingt vorhanden ist.

Die Gleichungen (1) und (2) können nun zu einem elektromechanischen Ersatzschaltbild zusammengefasst werden.

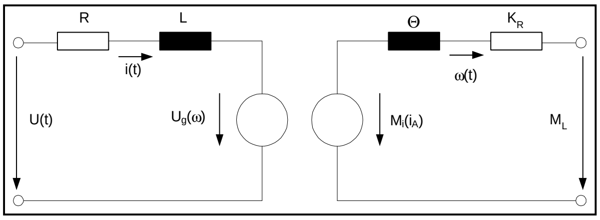

Abb. 1: Elektromechanisches Ersatzschaltbild

1.1 Energiebetrachtung

Zur besseren Interpretation der Gleichungen (1) und (2) wird nun eine Energiebetrachtung durchgeführt. Dazu wird die Gleichung (1) mit dem Strom i multipliziert und über ein unbestimmtes Intervall integriert.

$$\int u \cdot i dt = R \int i^2 dt + k \int \omega \cdot i dt + L \int i \frac{di}{dt} dt \qquad (3)$$

Der erste Term in Gleichung (3) beschreibt die elektrisch zugeführte Energie, der zweite die Ohmschen Verluste, der dritte die im System vorhandene mechanische Energie und der letzte die in der Induktivität gespeicherte Energie. Die Gleichung (2) wird mit der Drehzahl ω multipliziert und über ein unbestimmtes Intervall integriert.

$$J \int \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega dt = k \int i \cdot \omega dt - k_r \int \omega^2 dt - \int M_L \cdot w dt \qquad (4)$$

Der erste Term in Gleichung (4) beschreibt die im mechanischen System gespeicherte Rotationsenergie, der zweite Term die mechanische Energie, der dritte die geschwindigkeitsproportionalen Verluste und der letzte die abgegebene mechanische Energie sowie die darin enthaltene Verlustenergie aufgrund der Haftreibung.

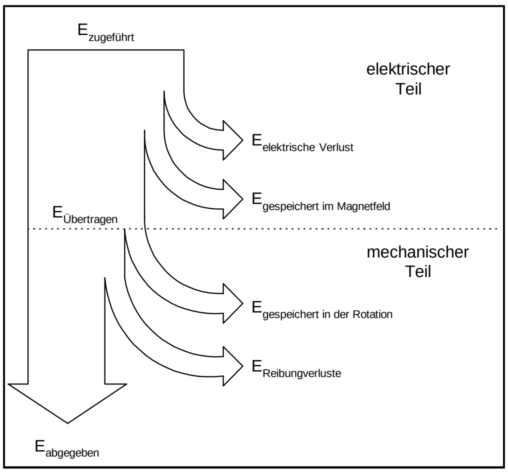

Abb. 2 : Schema der Energieverteilung

1.2 Übertragungsfunktion einer Gleichstrom-Maschine

Da bei der Identifikation der Parameter einer Gleichstrom-Maschine lediglich die Klemmgrößen Spannung und Ankerstrom benutzt werden, ist der spektrale Verlauf des Quotienten zwischen dem Ankerstrom und der Klemmspannung von besonderem Interesse.

Anhand dieser Übertragungsfunktion können Aussagen getroffen werden, an welcher Stelle im Frequenzbereich eine Anregung überhaupt sinnvoll ist, da sich dort relevante Parameteränderungen im Frequenzbereich auswirken.

Ein einfaches Beispiel sollte diese Aussage unterstützen:

Wenn man die Parameter eines elektrischen Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von 10 kHz schätzen will, macht es in der Praxis wenig Sinn ihn mit einer Wechselgröße von 10 Hz anzuregen, da die Ein- und Ausgangssignale im Rahmen der Messgenauigkeit näherungsweise identisch sind (Übertragungsfaktor etwa 1, Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal ungefähr 0 Grad). Erst wenn man mit der Anregung in die Nähe der Grenzfrequenz kommt, machen sie die Parameter des Filters bemerkbar und man hat eine Chance diese mit einer höheren Genauigkeit zu identifizieren.

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion werden die Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe der Laplace-Transformation in den Bildbereich transformiert.

$$U(s) = R \cdot I(s) + k \cdot \Omega(s) + L \cdot s \cdot I(s) \qquad (5)$$

$$J \cdot s \cdot \Omega(s) = k \cdot I(s) - k_r \cdot \Omega(s) - M_L \qquad (6)$$

Aus Gleichung (5) folgt damit für die Drehzahl

$$\Omega(s) = \frac{k \cdot I(s) - M_L}{k_r + s \cdot J} \qquad (7)$$

Setzt man nun (7) in (5) erhält man nach einigen Umformungen folgende Gleichung

$$U(s) = \frac{LJs^2 + s(RJ + Lkr) + RK_r + k^2}{k_r + sJ} I(s) - \frac{kM_L}{J} \frac{1}{\left(s + \frac{k_r}{J}\right)s} \qquad (8)$$

Die Gleichung (8) beschreibt den Zusammenhang zwischen den Klemmgrößen U und I sowie dem Lastmoment M_L.

Aus Gleichung (8) folgt damit:

$$\frac{I(s)}{U(s) + \frac{kM_L}{J} \frac{1}{\left(s + \frac{k_r}{J}\right)s}} = \frac{1}{L} \frac{s + \frac{k_r}{J}}{s^2 + s\left(\frac{R}{L} + \frac{k_r}{J}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{k_r}{J} + \frac{k^2}{RJ}\right)} \qquad (9)$$

führt man nun noch folgende Vereinfachungen ein

Bezeichnung	Einheit	Bezeichnung
τ_{ele}	s	elektrische Zeitkonstante
τ_{mech}	s	mechanische Zeitkonstante
k_A	1/s	Auslaufkonstante
V	A/Vs	Verstärkungsfaktor
$U^{\#}(s)$	V	$U(s) + \frac{kM_L}{J} \frac{1}{\left(s + \frac{k_r}{J}\right)s}$

mit diesen Abkürzungen ergibt sich folgende Übertragungsgleichung

$$\frac{I(s)}{U^{\#}(s)} = V \frac{s + k_A}{s^2 + s\left(\frac{1}{\tau_{ele}} + k_A\right) + \frac{1}{\tau_{ele}}\left(k_A + \frac{1}{\tau_{mech}}\right)} \qquad (10)$$

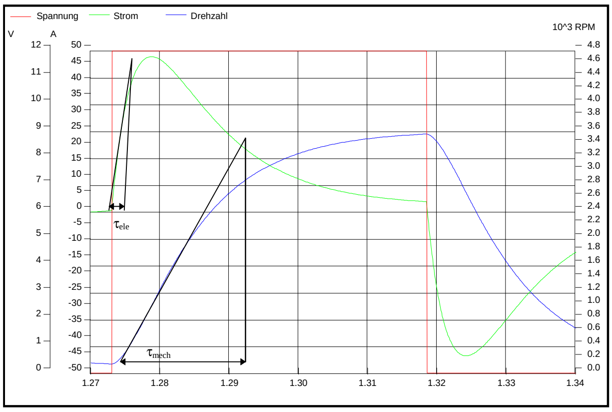

Abb. 3: Elektrische und mechanische Zeitkonstante der elektrischen Gleichstrom-Maschine

Die Konstante τ_{ele} bezeichnet man als die elektrische Zeitkonstante der Gleichstrommaschine. Die elektrische Zeitkonstante ist ein Maß für die Reaktionszeit des Stromes bei Änderung der Klemmspannung.

Die Konstante τ_{mech} bezeichnet man als die mechanische Zeitkonstante der Gleichstrommaschine. Die mechanische Zeitkonstante ist ein Maß für die Reaktionszeit der Drehzahl bei Änderung der Klemmspannung.

Mit Hilfe der Gleichung (9) kann nun der Frequenzgang der Gleichstrom-Maschine für feste Parameter dargestellt werden. In den folgenden Abbildungen ist der Betrags- und Phasenfrequenzgang sowie die Kennlinie für einen Motor mit den Parametern dargestellt.

Parameter	Einheit	Wert
R	Ω	0.19
L	H	0.0005
k	Vs	0.0323
J	kgm²	7.5e-5
kr	Nms	2e-5

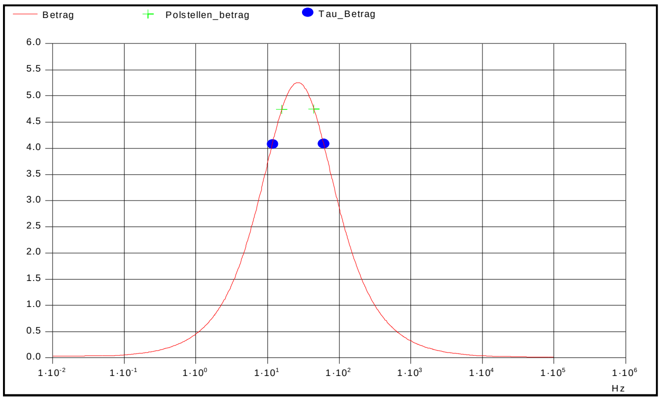

Abb. 4: Darstellung des Betragsfrequenzgangs einer Gleichstrom-Maschine

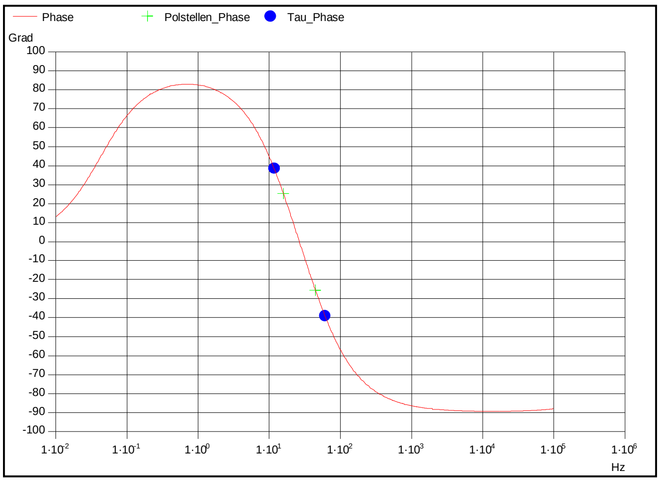

Abb. 5: Darstellung des Phasenfrequenzgangs einer

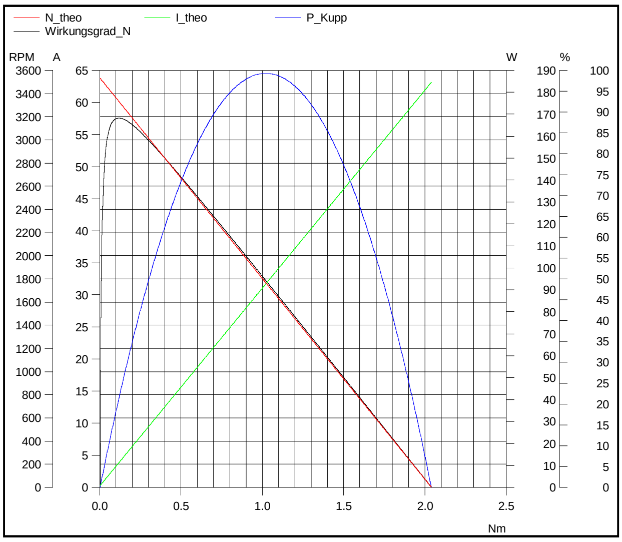

Abb. 6: Kennlinie einer Gleichstrom-Maschine

Zusätzlich zu dem Verlauf der jeweiligen Frequenzgänge sind noch die der mechanischen und elektrischen Zeitkonstante proportionalen Frequenzen sowie die Frequenzen der Polstellen der Übertragungsfunktion eingezeichnet.

Der Betragsfrequenzgang der Gleichstrom-Maschine entspricht einem Bandpassfilter mit einer Mittenfrequenz, die zwischen den beiden Zeitkonstanten der Maschine liegt.
Der Phasenfrequenzgang der Gleichstrom-Maschine entspricht dem Phasenfrequenzgang eines Bandpasses. Die Nullstelle im Zähler der Übertragungsfunktion führt zu der Phasendrehung bei tiefen Frequenzen zu Null. Die Gleichstrom-Maschine im dargestellten Beispiel besitzt zwei reelle Pole in der Übertragungsfunktion. Diese Pole treten im Frequenzgang als einfache aber getrennte Polstellen auf. Im Gegensatz dazu existieren auch Motoren mit konjugiert komplexen Polen, die im Frequenzgang als doppelte Polstellen bei der Mittenfrequenz des Bandpasses dargestellt werden können.

Bei der Betrachtung der Übertragungsfunktion können nun Bereiche festgelegt werden, in denen die Parameter der Gleichstrom-Maschine geschätzt werden können. Wie oben schon angedeutet, ergibt sich im unteren Bereich der Übertragungsfunktion eine Abhängigkeit von der Nullstelle im Zählerpolynom, diese Nullstelle hängt aber nur von der Auslaufkonstante ab. Außerdem ist in diesem Bereich der Betragsfrequenzgang nahezu Null, so dass dort keine sinnvolle Schätzung durchgeführt werden kann und die Auslaufkonstante somit nicht mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden kann.
Im Bereich der Zeitkonstanten der Gleichstrom-Maschine ergeben sich hinreichend große Amplituden zur Schätzung der Polstellen des Systems. Aus den Polstellen können dann die Parameter der Gleichstrom-Maschine berechnet

Gleichstrom-Maschine

werden. Für die Nullstellen des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion folgt aus Gleichung (10)

$$s_{01,2} = \frac{\frac{1}{\tau_{ele}} + k_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\tau_{ele}} + k_A}{2}\right)^2 - \frac{1}{\tau_{ele}}\left(k_A + \frac{1}{\tau_{mech}}\right)} \quad (11)$$

Die Polstellen des Systems werden rein reell, wenn der Term unter der Wurzel positiv ist, daraus folgt:

$$\tau_{mech} > 4\frac{\tau_{ele}}{\left(1 - k_A \cdot \tau_{ele}\right)^2} \quad (12)$$

Alle Gleichstrom-Maschinen, die die Bedingung in Gleichung (12) erfüllen, besitzen rein reelle Polstellen.

1.3 Schätzung der Polstellen der Übertragungsfunktion

Für alle Motoren, die Gleichung (12) erfüllen, kann nun der folgende Ansatz zu Bestimmung der Parameter gewählt werden

$$\frac{I(s)}{U^{\#}(s)} = V\frac{s + k_A}{\left(1 - sT_1\right)\left(1 - sT_2\right)} \quad (13)$$

diese Gleichung kann nun ausmultipliziert werden

$$\frac{I(s)}{U^{\#}(s)} = \frac{V}{T_1 T_2}\frac{s + k_A}{s^2 + s\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_1 T_2}} \quad (14)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Gleichung (9) ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für die Parameter der Gleichstrom-Maschine.

$$L = \frac{T_1 T_1}{V} \quad (15)$$

$$R = \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - k_A\right)L \quad (16)$$

$$\frac{k^2}{J} = \left(\frac{L}{T_1 T_2} - Rk_A\right) \quad (17)$$

zusätzlich noch die Auslaufkonstante des Motors bekannt ist, können daraus die Parameter des Motors berechnet werden. Die eigentliche Aufgabe der Schätzung besteht nur noch darin, die Polstellen des Nennerpolynoms zu bestimmen.

Bei der näheren Betrachtung der Übertragungsfunktion und des Frequenzgangs erkennt man, dass das System in einen Hochpass und einen Tiefpass zerlegt werden kann.

$$\frac{I(s)}{U^{\#}(s)} = V\frac{s + \frac{k_r}{J}}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} = V\frac{s + \frac{k_r}{J}}{1 + sT_2}\frac{1}{1 + sT_1} \quad (18)$$

Der erste Term in Gleichung (18) stellt einen Hochpassfilter da, der zweite Term einen Tiefpass.

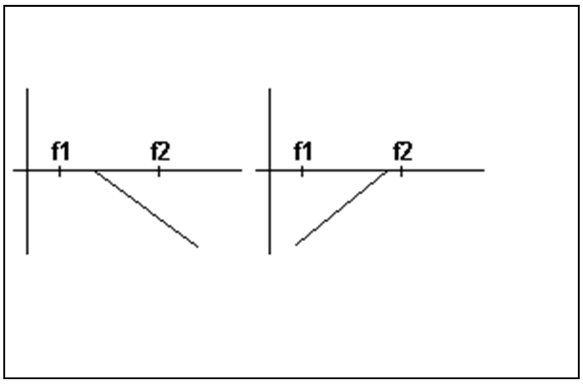

Abb. 7: Darstellung der Einzelfrequenzgänge des Gleichstrom-Motors

Wird der Motor jetzt nacheinander mit zwei Frequenzen f1 und f2 angeregt, können die Faktoren der Gleichung (18) getrennt und separat berechnet werden.

Wie in Abbildung 3 sofort ersichtlich ist, liefert der Tiefpass bei einer Anregung mit $\omega 1$ ungefähr einen Betragsfaktor von 1 und eine Phasenverschiebung von Null Grad, so dass der Tiefpass in erster Näherung vernachlässigt werden kann. Damit ergibt sich folgende Übertragungsfunktion

$$\frac{I(\omega_1)}{U^{\#}(\omega_1)} \approx V_1\frac{j\omega_1 + \frac{k_r}{J}}{1 + j\omega_1 T_2} \quad (19)$$

Wenn die Pole des Nennerpolynoms bestimmt sind und Multipliziert man die Gleichung (19) nun aus und trennt sie nach Real- und Imaginärteil, so erhält man das Gleichungssystem-Die Indizes I und R bezeichnen dabei immer den Real- bzw. Imaginärteil der jeweiligen Größe z.B. $U_R = \mathrm{Re}\{ U^{\#}(j\omega) \}$.

$$\begin{bmatrix} I_R - \omega_1 T_2 I_I = V_1 U_R^* \\ I_I + w_1 I_R T_2 = V_1 U_I^* \end{bmatrix} \qquad (20)$$

mit folgenden Abkürzungen

$$\begin{bmatrix} U_R^* = U_R \dfrac{k_r}{J} - \omega_1 U_I \\ U_I^* = U_I \dfrac{k_r}{J} + w_1 U_R \end{bmatrix} \qquad (21)$$

und die daraus folgenden Gleichungen für die Bestimmung von T_2 und V_1

$$\begin{bmatrix} T_2 = \dfrac{I_R U_I^* - I_I U_R^*}{w_1 (I_R U_R^* + I_I U_I^*)} \\ V_1 = \dfrac{I_R^2 + I_I^2}{U_R^* I_R + U_I^* I_I} \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Damit hat man einen ersten Schätzwert für die Bestimmung einer Polstelle der Übertragungsfunktion T_2 und des Verstärkungsfaktors V_1 bestimmt.

Diese Schätzwerte können jetzt mit in die Schätzung des zweiten Parameters benutzt werden. Dazu wird Gleichung (18) wie folgt umgeformt

$$I(w_2)(1 + j\omega_2 T_1) = V_2 U(w_2) \frac{j w_2 + \dfrac{k_r}{J}}{1 + j w_2 T_2} \qquad (23)$$

Gesucht sind jetzt die beiden Unbekannten T_1 und V_2 für die sich nach der Trennung der Gleichung (24) nach Real- und Imaginärteil folgende Bestimmungsgleichungen ergeben

$$\begin{bmatrix} T_1 = \dfrac{I_R U_I^{\circ} - I_I U_R^{\circ}}{w_2 (I_R U_R^{\circ} + I_I U_I^{\circ})} \\ V_2 = \dfrac{I_R^2 + I_I^2}{U_R^{\circ} I_R + U_I^{\circ} I_I} \end{bmatrix} \qquad (24)$$

mit folgenden Abkürzungen

$$\begin{bmatrix} U_R^{\circ} = \dfrac{U_R \dfrac{k_r}{J} - U_I \omega_2 + \omega_2 T_2 (\omega_2 U_R + U_I \dfrac{k_r}{J})}{1 + \omega_2^2 T_2^2} \\ U_I^{\circ} = \dfrac{U_I \dfrac{k_r}{J} + U_R \omega_2 + \omega_2 T_2 (\omega_2 U_I - U_R \dfrac{k_r}{J})}{1 + \omega_2^2 T_2^2} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (22) und (24) können nun iterativ die Parameter des Motors bestimmt werden. Dafür werden jeweils die Ergebnisse aus (22) in (24) eingesetzt bis der Iterationsalgorithmus konvergiert. Danach können mit Hilfe der Gleichungen (15) bis (17) die Parameter des Prüflings bestimmt werden.

2 Identifikation der Parameter eines Beispielmotors

Für das oben angeführte Beispiel eines realen Motors ergibt sich folgende Übertragungsfunktion

$$\frac{I(s)}{U^{\#}(s)} = \frac{1}{0.0005} \frac{s + \dfrac{2 \cdot 10^{-5}}{7.5 \cdot 10^{-5}}}{s^2 + s\left(\dfrac{0.19}{0.0005} + \dfrac{2 \cdot 10^{-5}}{7.5 \cdot 10^{-5}}\right) + \dfrac{0.19}{0.0005}\left(\dfrac{2 \cdot 10^{-5}}{7.5 \cdot 10^{-5}} + \dfrac{0.0323^2}{0.19 \cdot 7.5 \cdot 10^{-5}}\right)} \qquad (26)$$

daraus ergibt sich

$$\frac{I(s)}{U^{\#}(s)} = 2000 \frac{s + 0.2666}{s^2 + 380.2666 s + 27922.4}$$

(27)

mit folgenden charakteristischen Kenngrößen

$$\tau_{ele} = 2.63 ms$$
$$\tau_{mech} = 13.66 ms$$
$$\frac{k_r}{J} = 0.2666$$

Typische Strom- und Spannungsverlauf mit dem Kehrwert der elektrischen und mechanischen Zeitkonstanten als Anregfrequenzen sind in der Abbildung (8) wiedergegeben.

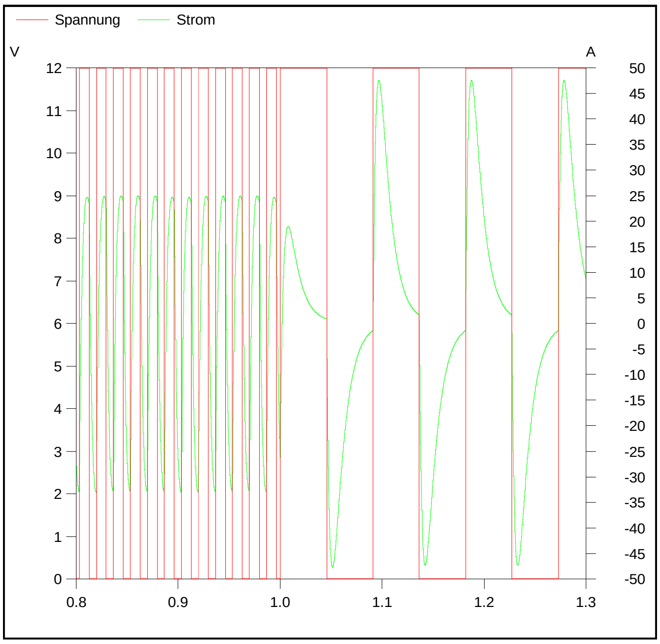

Abb. 8: Strom- und Spannungsverläufe für die Bestimmung der Parameter des Beispielmotors

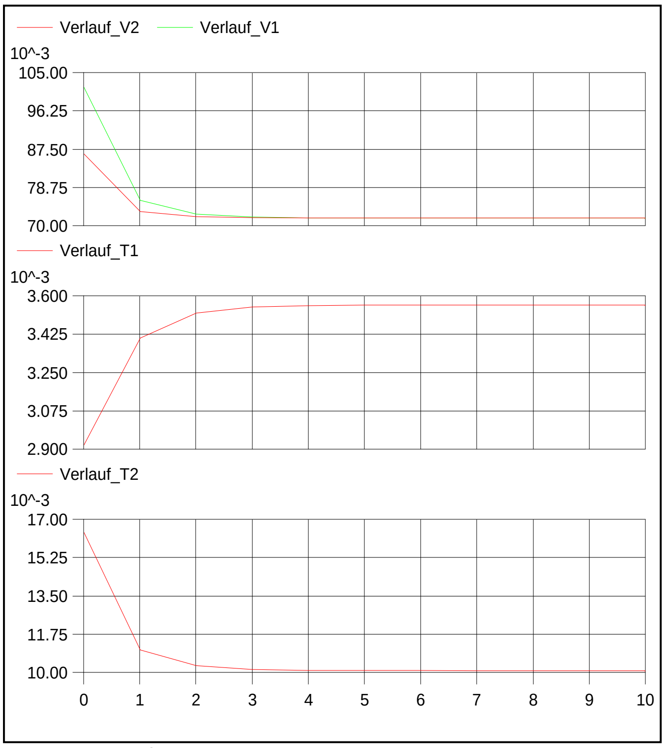

Abb. 9: Verläufe der Schätzparameter T1, T2, V1, V2

In Abbildung 9 sind die Verläufe der Parameter T1, T2, V1 und V2 wiedergegeben. Man erkennt deutlich die Konvergenz des Verfahrens. Am Ende der Iteration erhält man folgende Parameter

T1=0.00356063
T2=0.0100582
V1=0.0716225
V2=0.0716479

Damit ergeben sich folgende Parameter für den Prüfling:
R= 0.1904
L= 0.000501
k=0.03233

Die Genauigkeit der bestimmten Parameter liegt damit unterhalb von 0.2%.